

FORMLER TILL NATIONELLT PROV I MATEMATIK

KURS C, D OCH E

ALGEBRA

Regler

$$\left. \begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned} \right\} \text{ (kvadreringsregler)}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad \text{(konjugatregeln)}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Andrags- ekvationer

Ekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rötterna

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{och} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

där $x_1 + x_2 = -p$ och $x_1 \cdot x_2 = q$

ARITMETIK

Prefix

T	G	M	k	h	d	c	m	μ	n	p
tera	giga	mega	kilo	hekto	deci	centi	milli	mikro	nano	piko
10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}

Potenser

För reella tal x och y och positiva tal a och b gäller

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x b^x = (ab)^x \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad a^0 = 1$$

Logaritmer

För positiva tal x och y gäller:

$$10^x = y, \quad x = \lg y \quad e^x = y, \quad x = \ln y$$

$$\lg xy = \lg x + \lg y \quad \lg \frac{x}{y} = \lg x - \lg y$$

$$\lg x^p = p \cdot \lg x$$

Geometrisk summa

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = \frac{a(k^n - 1)}{k - 1} \quad \text{där } k \neq 1$$

DIFFERENTIAL- OCH INTEGRALKALKYL

Derivatans definition

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Deriveringsregler

Funktion	Derivata
x^a där x är ett reellt tal	ax^{a-1}
a^x ($a > 0$)	$a^x \ln a$
$\ln x$ ($x > 0$)	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$)	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Kedjeregeln

Om $y = f(z)$ och $z = g(x)$ är två deriverbara funktioner så gäller för den sammansatta funktionen $y = f(g(x))$ att

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ eller } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Några primitiva funktioner

$f(x)$	$F(x)$ (C är en reell konstant)
k	$kx + C$
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
a^x ($a > 0, a \neq 1$)	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

DIFFERENTIALEKVATIONER

Homogena ekvationer

Av 1:a ordningen: $y' + ay = 0$

Lösningarna kan skrivas $y = Ce^{-ax}$

Av 2:a ordningen: $y'' + ay' + by = 0$

Den karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ har rötterna r_1 och r_2

Om r_1 och r_2 är reella tal och $r_1 = r_2$ så kan lösningarna skrivas

$$y = (C_1x + C_2)e^{r_1x}$$

Om r_1 och r_2 är reella tal och $r_1 \neq r_2$ så kan lösningarna skrivas

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

Om $r_1 = s + it$ och $r_2 = s - it$ kan lösningarna skrivas

$$y = e^{sx}(C_1 \cos tx + C_2 \sin tx) = re^{sx} \cdot \sin(tx + \varphi)$$

Inhomogena ekvationer

Generellt bestäms den allmänna lösningen som $y = y_h + y_p$, där y_p är en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen och y_h den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Separabla differentialekvationer: $g(y)y' = f(x)$

Löses enligt $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

FUNKTIONSLÄRA

Räta linjen

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Riktningskoefficient för linje genom punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) där $x_1 \neq x_2$

$$y = kx + m$$

Linje genom punkten $(0, m)$ med riktningskoefficienten k

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Linje genom punkten (x_1, y_1) med riktningskoefficienten k

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

Villkor för vinkelräta linjer

Exponential-funktioner

$$y = C \cdot a^x$$

C och a är konstanter
 $a > 0$ och $a \neq 1$

Potensfunktioner

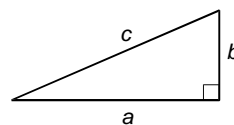
$$y = C \cdot x^a$$

C och a är konstanter

GEOMETRI

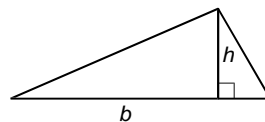
Pythagoras sats

$$a^2 + b^2 = c^2$$



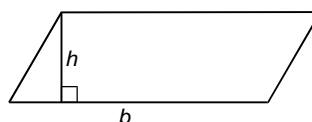
Triangel

$$\text{area} = \frac{bh}{2}$$



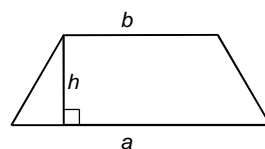
Parallellogram

$$\text{area} = bh$$



Parallelltrapets

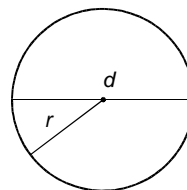
$$\text{area} = \frac{h(a+b)}{2}$$



Cirkel

$$\text{area} = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

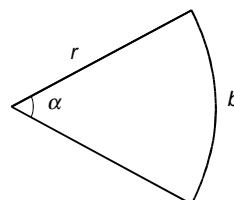
$$\text{omkrets} = 2\pi r = \pi d$$



Cirkelsektor

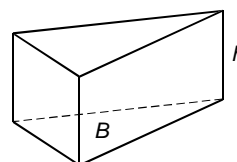
$$\text{bågen } b = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$$

$$\text{area} = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{br}{2}$$



Prisma

$$\text{volym} = Bh$$

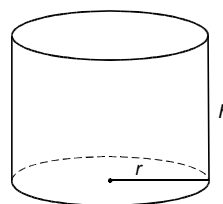


Cylinder

Rak cirkulär cylinder

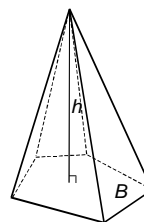
$$\text{volym} = \pi r^2 h$$

$$\text{mantelarea} = 2\pi rh$$



Pyramid

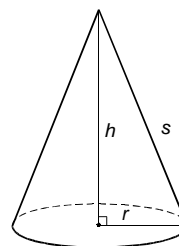
$$\text{volym} = \frac{Bh}{3}$$

**Kon**

Rak cirkulär kon

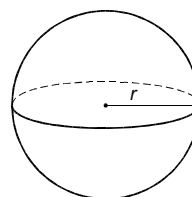
$$\text{volym} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$\text{mantelarea} = \pi r s$$

**Klot**

$$\text{volym} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

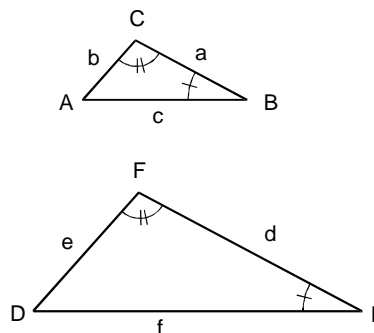
$$\text{area} = 4\pi r^2$$

**Likformighet**

För likformiga geometriska figurer gäller att motsvarande vinklar är lika stora och att förhållandet mellan motsvarande sidor är lika.

Triangelarna ABC och DEF är likformiga.

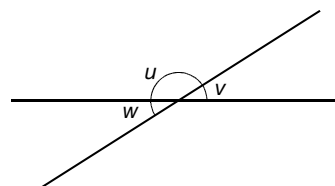
$$\text{Då gäller } \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

**Skala**

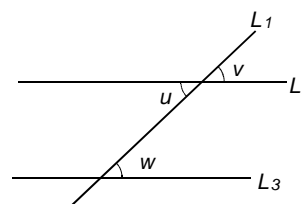
$$\text{Areaskalan} = (\text{Längdskalan})^2 \quad \text{Volymaskalan} = (\text{Längdskalan})^3$$

Vinklar

När två räta linjer skär varandra är sidovinklarnas summa 180° (t.ex. $u + v = 180^\circ$) och vertikalvinklar lika stora (t.ex. $w = v$).



När en linje L_1 skär två andra inbördes parallella linjer L_2 och L_3 så är likbelägna vinklar lika stora (t.ex. $v = w$) och alternatvinklar lika stora (t.ex. $u = w$).



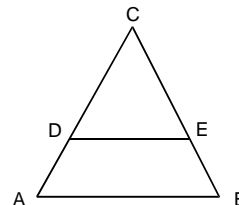
Omvänt gäller att om alternatvinklar eller likbelägna vinklar är lika stora så är linjerna L_2 och L_3 parallella.

Topptriangel- och transversalsatsen

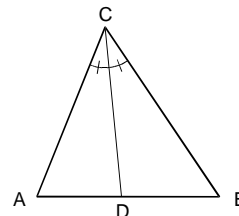
Om DE är parallell med AB gäller

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{CE}{BC} \text{ och}$$

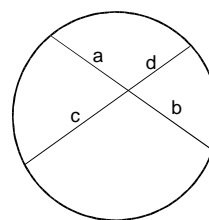
$$\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{BE}$$

**Bisektrissatsen**

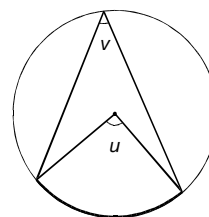
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

**Kordasatsen**

$$ab = cd$$

**Randvinkelsatsen**

Medelpunktsvinkeln till en cirkelbåge är dubbelt så stor som randvinkeln till samma cirkelbåge ($u = 2v$)

**KOMPLEXA TAL****Representation**
 $z = x + iy = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ där x, y, r och φ är reella tal samt $i^2 = -1$
Argument

$$\arg z = \varphi \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Absolutbeloppet

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Konjugat

Talen $z = x + iy$ och $\bar{z} = x - iy$ kallas konjugerade tal

Räknelagar

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

de Moivres formel

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Eulers formler

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

NUMERISKA METODER

Ekvationslösning Newton-Raphsons iterationsformel: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Integraler Intervallet $a_0 \leq x \leq a_n$ delas in i n delintervall.

Mittpunkten i varje delintervall betecknas x_1, x_2, \dots, x_n

Rektangelmetoden: $\int_{a_0}^{a_n} f(x)dx = \frac{a_n - a_0}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$

Trapetsmetoden: $\int_{a_0}^{a_n} f(x)dx = \frac{a_n - a_0}{2n} (f(a_0) + 2f(a_1) + 2f(a_2) + \dots + 2f(a_{n-1}) + f(a_n))$

Differential- ekvationer

$y' = f(x, y)$, steglängd h

Eulers metod (tangentmetoden): $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$

Mittpunktsmetoden: $y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k\right)$ där $k = f(x_n, y_n)$

TRIGONOMETRI

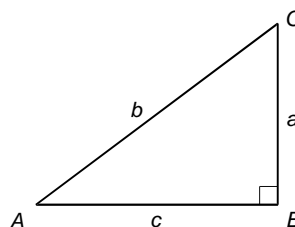
Definitioner

ABC är en rätvinklig triangel.

$$\sin A = \frac{a}{b} \left(\frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}} \right)$$

$$\cos A = \frac{c}{b} \left(\frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}} \right)$$

$$\tan A = \frac{a}{c} \left(\frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}} \right)$$



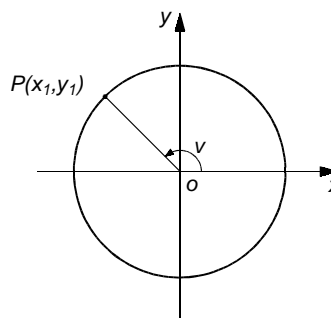
OP är radie i en enhetscirkel.

Koordinaterna för P är (x_1, y_1)

$$\sin v = y_1$$

$$\cos v = x_1$$

$$\tan v = \frac{y_1}{x_1}$$



Sinussatsen

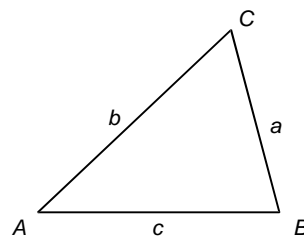
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Cosinussatsen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Areasatsen

$$\text{arean} = \frac{ab \sin C}{2}$$

**Trigonometriska
formler**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$a \sin x + b \cos x = c \sin(x + \nu) \quad \text{där } c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{och } \tan \nu = \frac{b}{a}$$

**Exakta
värden**

Vinkel ν (grader)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
(radianer)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \nu$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \nu$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \nu$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0