Dubbelintegraler

En delmängd E av $\Re^n$ sägs ha area 0 om det finns ändligt många rektanglar

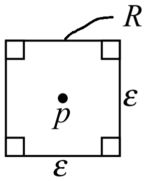
$R_1,\ldots,R_n$ sådana att

i) $E \subset R_1 U \ldots U R_n$

ii) Summan av rektanglarna kan fås att bli hur liten som helst genom lämpligt val av rektanglar.

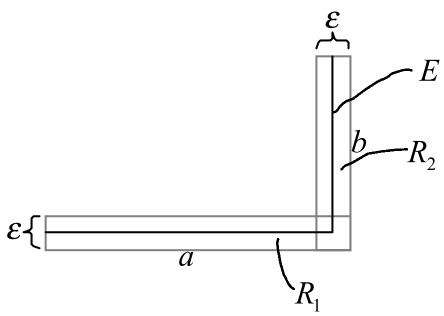
Ex 1

En punkt har area 0.



$P \subset R$ och $area(R) = \varepsilon^2$ kan fås att bli så liten som helst genom lämpligt val av ε.

Ex



E har area 0. ty

i) $E \subset R_1 \cup R_2$, och

ii) $area(R_1) + area(R_2) = a\varepsilon + b\varepsilon$

Kan fås genom lämpligt val av ε.

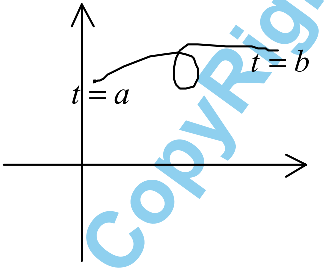
Ex

Funktionsgrafer

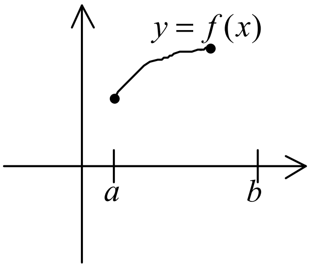
$y = f(x) \quad a \le x \le b$

där f är kontinuerlig har area 0, kan man visa.

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases} \quad a \le t \le b$$



$y = f(x) \quad a \le x \le b$



Dubbelintegraler kan beräknas med itererar integration. Följande resultat gäller:

Sats

Låt $D \in \Re^2$ vara begränsad och antag att:

i) f är begränsad på D.

ii) f är kontinuerlig på hela D utom eventuellt på en delmängd av D med area 0.

Då existerar $\iint_D f(x,y)dxdy$

och

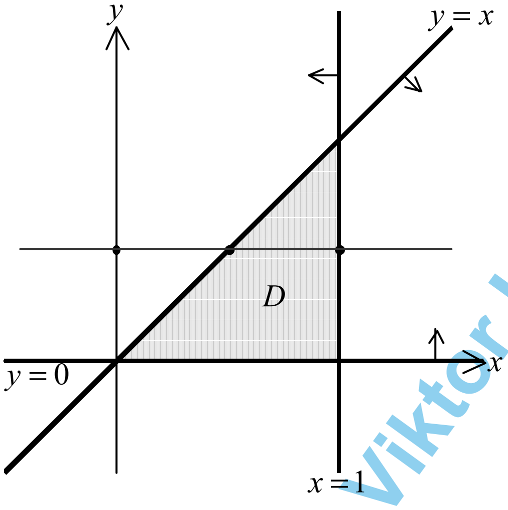
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int\left(\int f(x,y)dx\right)dy = \int\left(\int f(x,y)dy\right)dx$$

Där integrationsgränserna i de båda itererade enkelintegralerna bestäms av D.

Ex $\quad f(x,y) = e^{-x^2}$

$D: 0 \le y \le x,\ x \le 1$

$f(x,y) = e^{-x^2}$ är kontinuerlig i hela $\Re^2$, (1) speciellt på D.



Vidare är D kompakt, och alltså har f som är kontinuerlig ett största och ett minsta värde på D. Speciellt är f begränsad på D. (2).

(1) och (2) visar att villkoren i satsen är uppfyllda.

Vi får att

$\iint_D e^{-x^2} dxdy\ \exists$ och att

$$\iint_D e^{-x^2} dxdy = \underbrace{\int_0^1\left(\int_y^1 e^{-x^2} dx\right)dy}_{A} = \underbrace{\int_0^1\left(\int_0^x e^{-x^2} dy\right)dx}_{B}$$

Här är B enklast att beräkna.

Vi har att

$$\mathrm{B}=\int_0^1\left(\int_0^x e^{-x^2}\,dy\right)dx=\int_0^1\left(\left[ye^{-x^2}\right]_{y=0}^{y=x}\right)dx=\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

$$\because \iint_D e^{-x^2}\,dxdy=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

Om minst ett av följande gäller:

1) D är obegränsad.

2) f är obegränsad på D.

Kallas $\iint_D f(x,y)dxdy$ generaliserad, följande resultat gäller.

<u>Sats</u> (Fubinis sats)

Antag att $\iint_D f(x,y)dxdy$ är generaliserad och att f förutsätts vara kontinuerlig på hela D utom eventuellt på en delmängd av D som har area 0.

Då gäller följande:

Om någon av de itererade integralerna

$\int\left(\int|f(x,y)|dx\right)dy$ och $\int\left(\int|f(x,y)|dy\right)dx$

Existerar (båda är generaliserade) så existerar alla de tre integralerna

$\iint f(x,y)dxdy,\ \int\left(\int f(x,y)dx\right)dy,\ \int\left(\int f(x,y)dy\right)dx$ och är lika.