Taylors formel i flera variabler

Enligt taylors formel i en variabel gäller att

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)t+\frac{1}{2!}\cdot\varphi''(0)t^2+\ldots+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)\cdot t^n+\frac{1}{(n+1)!}t\varphi^{r(n+1)}(\theta)\quad \text{för något } \theta\in[0,t]$$

Sätt $t=1$ i denna formel, så fås att

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{1}{2!}\cdot\varphi''(0)+\ldots+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}\cdot\varphi^{(n+1)}(\theta)\quad \text{för något } \theta\in[0,1]$$

Låt nu $f(x)$ vara en funktion av p variabler.

Låt $a=(a_1,\ldots,a_p)$ och $h=(h_1,\ldots,h_p)\in\Re^p$ och sätt

$$\varphi(t)=f(a+th)=f(a_1+th_1,\ldots,a_p+th_p)h_1+\ldots+f_p'(a_1+th_1,\ldots,a_p+th_p)h_p=$$

$$=f'(a+th)h_1+\ldots+f_p'(a+th)h_p=h_1D_1f(a+th)+\ldots+h_pD_pf(a+th)$$

$\because\ \varphi'(t)=(h_1D_1+\ldots+h_pD_p)f(a+th)$ men $h_1D_1+\ldots+h_pD_p=(h_1,\ldots,h_p)\cdot(D_1,\ldots,D_p)$

Sätt $\nabla=(D_1,\ldots,D_p)$

$$\left(\begin{array}{l}\text{I analogi med att}\\ \nabla f=(D_1f,\ldots,D_pf)=(D_1,\ldots,D_p)f\end{array}\right)$$

Med demma beteckning får vi att

$$\varphi'(t)=(h\cdot\nabla)f(a+th)$$

Upprepad användning av detta ger att

$$\varphi^{(k)}(t)=(h\cdot\nabla)^kf(a+th)\quad k=1,2,\ldots$$

Insättning av $\varphi(t)=f(a+th)$

(1) ger alltså att

$$(2)\ \underbrace{f(a+h)}_{\varphi(1)}=\underbrace{f(a)}_{\varphi(0)}+\underbrace{(h\cdot\nabla)f(a)}_{\varphi'(0)}+\underbrace{\frac{1}{2!}(h\cdot\nabla)^2f(a)}_{\frac{1}{2!}\varphi''(0)}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{n!}(h\cdot\nabla)^nf(a)}_{\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)}+\underbrace{\frac{1}{(n+1)!}(h\cdot\nabla)^{n+1}f(a+\theta h)}_{\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta)}$$

$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{1}{2!}\varphi''(0)\ldots$ är Taylors formel för flera (p) variabler. I härledning av (2) har vi använt kedjeregeln $n+1$ gånger. Detta kan vi säkert göra om $f\in C^{n+1}$ när a_1 och det antar därför gälla.

Annan form av resttermen:

$(f\in C^{n+1}$ nära a antas gälla$)$

$$(h\cdot\nabla)^{n+1}f(a+\theta h)=(h_1D_1+\ldots+h_pD_p)^{n+1}f(a+\theta h)=$$

$$=(3)=\underbrace{(h_1D_1+\ldots+h_pD_p)\cdot\ldots\cdot(h_1D_1+\ldots+h_pD_p)}_{n+1\text{ st}}f(a+\theta h)=\text{ändligt många termer av typen}$$

$$\underbrace{h_iD_i\cdot\ldots\cdot h_{i_{n+1}}D_{i_{n+1}}f(a+\theta h)}_{(p^{n+1}\text{ st})}\quad\text{där } 1\le i_1\le p,\ldots,1\le i_p\le p$$

$$(4)\ (*) = h_{i_1} \cdot \ldots \cdot h_{i_{n-1}} \cdot \underbrace{D_{i_1} \cdot \ldots \cdot D_{i_{n+1}} f(a+\theta h)}_{\substack{\text{En } (n+1)\text{-drivata} \\ \text{Eftersom } f \in C^{n+1} \text{ nära } a \\ \text{då } h \text{ nära } 0.}}$$

Vidare har vi att

$$(5)\ h_{i_1} \cdot \ldots \cdot h_{i_{n+1}} = |h|^{n+1} \cdot \underbrace{\underbrace{\frac{h_{i_1}}{|h|}}_{|\ |\le 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{h_{i_{n+1}}}{|h|}}_{|\ |\le 1}}_{\substack{\text{Begränsad} \\ (**)\text{ Se nedan}}}$$

$\underline{(**)}$:

$$\left|\frac{h_{i_1}}{|h|}\right| = \frac{|h_{i_1}|}{|h|} = \frac{|h_{i_1}|}{\sqrt{h_1^2 + \ldots + h_{i_1}^2 + \ldots + h_p^2}} \le \frac{|h_{i_1}|}{\sqrt{h_{i_1}^2}} = \frac{|h_{i_1}|}{|h_{i_1}|} = 1$$

(3), (4) och (5) visar att resttermen i (2) även kan skrivas

$|h|^{n+1} A(h)$ $\left(\text{det vill säga } O(|h|^{n+1})\right)$

där $A(h)$ är begränsad då h är nära 0.

Sammanfattning:

Om $f \in C^{n+1}$ nära a har vi att

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (h \cdot \nabla)^k f(a) + |h|^{n+1} A(h)$$

där $A(h)$ är begränsad då h är nära 0.

Ex $p=2,\ n=2$

Enligt ovan har vi att

$$(1)\ f(a+h)=f(a)+(h\cdot\nabla)^2 f(a)+\frac{1}{2!}(h\cdot\nabla)f(a)+|h|^3 A(h)$$

där $A(h)$ begränsad då h är nära 0.

Eftersom $p=2$ så är:

$$h\cdot\nabla=(h_1,h_2)\cdot(D_1,D_2)=h_1D_1+h_2D_2$$

$$\because (h\cdot\nabla)f(a)=(h_1D_1+h_2D_2)f(a)=h_1D_1f(a)+h_2D_2f(a)=h_1f_1^{'}(a)+h_2f_2^{'}(a)$$

Vidare är

$$(h\cdot\nabla)^2=(h_1D_1+h_2D_2)^2=h_1{}^2D_1{}^2+2h_1h_2D_1D_2+h_2{}^2D_2{}^2$$

$$\because (h\cdot\nabla)^2 f(a)=h_1^2f_{11}^{''}(a)+2h_1h_2f_{12}^{''}+h_2^2f_{22}^{''}(a)$$

Sambandet (1) är alltså detsamma som sambandet

$$f(a_1+h_1,a_1+h_2)=f(a_1,a_2)+h_1f_1^{'}(a_1,a_2)+h_2f_2^{'}(a_1,a_2)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h_1^2f_{11}^{''}(a_1,a_2)+2h_1h_2f_{12}^{''}(a_1,a_2)+h_2f_2^{'}(a_1,a_2)\right)+\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3A(h_1,h_2).$$

Tillämpningar av Taylors formel på stationära punkter

Låt f vara en funktion av n variabler och låt a vara en stationär punkt till f, det vill säga en punkt där

$$f_1^{'}(a)=\ldots=f_n^{'}(a)=0$$

Enligt Taylors formel har vi att

$$(1)\ f(a+h)=f(a)+(h\cdot\nabla)^2 f(a)+\frac{1}{2!}(h\cdot\nabla)f(a)+|h|^3 A(h)$$

där $A(h)$ begränsad då h är nära 0.

Men eftersom f är stationär i a har vi att

$$(h\cdot\nabla)f(a)=(h_1D_1+\ldots+h_nD_n)f(a)=h_1\underbrace{f_1^{'}(a)}_{=0}+\ldots+h_n\underbrace{f_n^{'}(a)}_{=0}=0$$

Insatt i (1) ger att

$$(2)\ f(a+h)=f(a)+\frac{1}{2!}(h\cdot\nabla)^2 f(a)+\underbrace{|h|^3A(h)}_{\text{Se bevis för att försumma resttermen}}$$

Förutsatt att resttermen kan försummas i (2), så följer av (2) följande:

1) f har strikt lokalt min i a om
$(h\cdot\nabla)^2 f(a)>0$ för alla små $h\neq 0$.

2) f har strikt lokalt max i a om
$(h\cdot\nabla)^2 f(a)<0$ för alla små $h\neq 0$.

3) f har varken lokalt max eller min i a om det finns godtyckligt små $h',h''\neq 0$
sådana att $(h'\cdot\nabla)^2 f(a)>0$ och $(h''\cdot\nabla)^2 f(a)<0$.

Sätt $Q(n) = (h \cdot \nabla)^2 f(a)$

Då gäller att

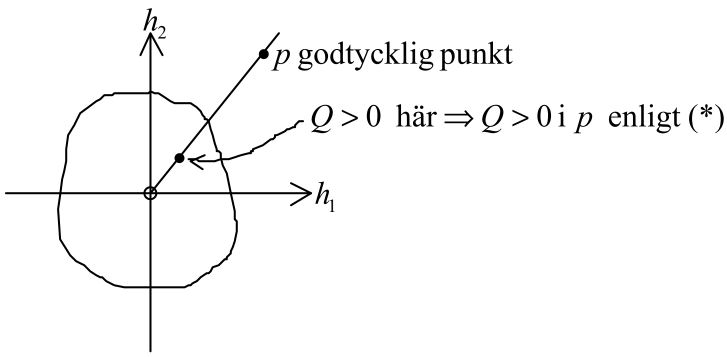
$Q(th) = ((th) \cdot \nabla)^2 f(a) = t^2 (h \cdot \nabla) f(a) = t^2 Q(a)$

(*) Det vill säga om $Q(h) > 0 \ (< 0)$ för något h, då är $Q > 0 \ (< 0)$ i alla punkter $th \ \ t \neq 0$.

<u>Konsekvens :</u>

h - rummet

a)



Om $Q > 0$ i någon sådan mängd så gäller att $Q(h) > 0 \ \ \forall h \neq 0$ på grund av (*).

Analogt om $Q < 0$ i mängden ovan.

b)

Vi får också att om $Q(h) > 0$ så finns det punkter godtyckligt nära 0 i h - rummet där $Q < 0$, nämligen punkterna th där $t \to 0^+$.

Analogt om $Q(h) < 0$.

På grund av b) så kan 3) ovan ersättas med :

3') f har varken lokalt max eller min i a om det finns h' och h'' sådana att $Q(h') > 0$ och $Q(h'') < 0$.

1) och 2) ovan brukar vidare ersättas med :

1') f har lokalt min i a om $Q(h) > 0 \ \ \forall h \neq 0$

2') f har lokalt max i a om $Q(h) < 0 \ \ \forall h \neq 0$

Kraven 1') och 2') kan förefalla starkare än kraven i 1) och 2), men är den inte på grund av a).

Om f är stationär i a och varken har lokalt max eller min i a, sägs f ha sadelpunkt i a.