Största och minsta värde, forts

4.19 $f(x,y)=(x^2+y)e^{-x-y}$ studeras på $D: x\le 0,\ y\le 0$

Minsta värde?

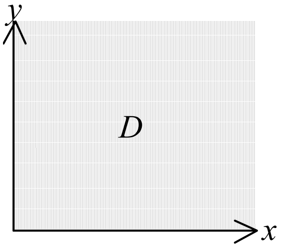
Vi har att

$$f(x,y)=\underbrace{(x^2+y)}_{\ge 0}\underbrace{e^{-x-y}}_{>0}\ge 0\,\forall (x,y)\in D$$

Samt att $(0,0)\in D$ och att $f(0,0)=0$

Det gäller att f har minsta värde på D och att det minsta värdet är 0.

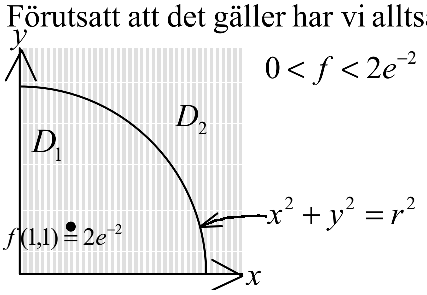
Största värde?



Det tydes som om

$$(1)\begin{cases} f(x,y)=(x^2+y)e^{-x-y}\to 0 \\ \text{då } (x,y)\to\infty \text{ i } D\end{cases}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+y^2}\to\infty\right)$$

Förutsatt att det gäller har vi alltså för något r situationen i figur nedan :



$0<f<2e^{-2}$ i hela detta område

Vi har då följande :

På D_1 som är kompakt har f som är kontinuerlig ett största värde och eftersom $(1,1)\in D_1$ så är $\max_{D_1} f\ge f(1,1)=2e^{-2}$.

På D_2 har vi $0<f(x,y)<2e^{-2}\ \ \forall (x,y)\in D_2$ $\left(r\text{ är valt så stort att detta gäller. Går förutsatt att (1) gäller.}\right)$

Det följer att f har ett största värde på $D=D_1\cup D_2$ och att $\max_D f=\max_{D_1} f$.

Största värde finns alltså förutsatt att (1) gäller.

Vi visar att (1) gäller med hjälp av polära koordinater.

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta\end{cases},\ \text{Ger } \forall (x,y)\in D \text{ att}$$

$$0\le f(x,y)\le f(r\cos\theta,r\sin\theta)=(r^2\cos^2\theta+r\sin\theta)e^{-r(\cos\theta+\sin\theta)}\underset{\substack{\text{Ty }\cos\theta+\sin\theta\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \forall\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\text{ se nedan }(*)}}{\le}(r^2\underbrace{\cos^2\theta}_{\le 1}+r\underbrace{\sin\theta}_{\le 1})e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}r}\le$$

$$\le(r^2+r)e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}r}$$

$\because 0 \le f(x,y) \le (r^2+r)e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}r} \quad (x,y)\in D$

$= \dfrac{r^2+r}{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}r}} \to 0$ då $r \to \infty$

$\because f(x,y) \to 0$ då $(x,y) \to \infty$ i D dvs (1) gäller och alltså har f största värde på D.

(*) Vi har att $\underbrace{\begin{cases} \cos\theta \ge \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta \ge 0 \end{cases} \quad \forall\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]}_{\because \cos\theta+\sin\theta \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]}$ och $\underbrace{\begin{cases} \cos\theta \ge 0 \\ \sin\theta \ge \sin\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \quad \forall\theta \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]}_{\because \cos\theta+\sin\theta \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]}$

Det följer att $\cos\theta + \sin\theta \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Normalt brukar denna utförliga motivering av att $\max_D f \; \exists$ ersättas med något i stil med :

Man konstaterar att

1) $f(x,y) \ge 0 \quad \forall (x,y)\in D$ och $f(x,y)$ antar värden > 0 i D

2) $f(x,y) \to 0$ då $(x,y) \to \infty$ i D (Bevis som ovan)

Och drar sedan slutsatsen, (utan fler argument) att $\max_D f \; \exists$.

Bestämning av $\max_D f$:

1) Stationära punkter i D^0 dvs punkter i D^0 där $f_1' = f_2' = 0$

$f_1'(x,y) = 2xe^{-x-y} + (x^2+y)e^{-x-y}(-1) = \left(2x-(x^2-y)\right)\underbrace{e^{-x-y}}_{>0}$

$f_2'(x,y) = \left(1-(x^2-y)\right)\underbrace{e^{-x-y}}_{>0}$

$\because f_1' = f_2'$

$\begin{cases} 2x = x^2+y \\ 1 = x^2+y \end{cases}$

$\because 2x-1=0,\ x=\dfrac{1}{2}$

$y = 1-x^2 = 1-\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

2)

$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right) \in D^0$

$f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right) = \left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\right)e^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = e^{-\frac{5}{4}}$

3) ∂D

$a)$ Randkurvan $x \geq 0,\ y=0$

$f(x,0) = x^2e^{-x}$

Studerar alltså

$a(x) = x^2e^{-x} \quad x \geq 0$

$a'(x) = (2x-x^2)e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$

x	0	2	∞
$a'(x)$	+	0	−
$a(x)$	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$

$b)$ Randkurvan $x=0,\ y \geq 0$

$f(0,4) = ye^{-y}$

Studera alltså

$b(y) = ye^{-y}$

$b'(y) = (1-y)e^{-y}$

y	0	1	∞
$b'(x)$	+	0	−
$b(x)$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

Ovanstående visar att

$$\max f = \max\left(e^{-\frac{5}{4}}, \underbrace{4e^{-2}}_{\underbrace{\frac{4}{e}}_{>1}\cdot e^{-1}>e^{-1}}, e^{-1} \right)$$

Vi har att

$$4e^{-2} > e^{-\frac{5}{4}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$4 > e^{\frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{4^4}_{256} > \underbrace{e^3}_{<3^3=27,\ \text{sant}}$$

$$\because 4e^{-2} > e^{-\frac{5}{4}}$$