Högre ordningens derivator.

Sats :

Låt D vara en öppen mängd av $\Re^2$ och antag att $f \in C^2(D)$. Då gäller att $f''_{12}(x,y) = f''_{21}(x,y) \ \ \forall x, y \in D.$

En konsekvens :

Antag att $f(x,y,z) \in C^3$ på en öppen mängd av $\Re^3$.

Då gäller t.ex. att

$f^{(3)}_{321}(x,y,z) = D_1 D_2 D_3 f(x,y,z).$

Bevis :

$$f^{(3)}_{321}(x,y,z) = D_1 D_2 D_3 f(x,y,z) = D_1\big(D_2 D_3 f(x,y,z)\big) \underset{\substack{\text{Ty } f \in C^2 \text{ i } y \text{ och } z \text{ för fixt } x \\ \text{eftersom } f \in C^3 \text{ i } x, y \text{ och } z \\ f \in C^2 \text{ i } x, y \text{ och } z \Rightarrow \\ f \in C^2 \text{ i } y \text{ och } z \text{ för varje fixt } x.}}{=} D_1\big(D_3 D_2 f(x,y,z)\big) =$$

$$= D_1 D_3 \big(D_2 f(x,y,z)\big) \underset{\substack{\text{Ty } D_2 f(x,y,z) \in C^2 \text{ i } x \text{ och } z \text{ för fixt} \\ y \text{ eftersom } f \in C^3 \text{ i } x, y \text{ och } z \Rightarrow \\ D_2 f \in C^2 \text{ i } x, y \text{ och } z \Rightarrow \\ D_2 f \in C^2 \text{ i } x \text{ och } z \text{ för varje fixt } y.}}{=} D_3 D_1 \big(D_2 f(x,y,z)\big) = D_3\big(D_1 D_2 f(x,y,z)\big) \underset{\text{Likartat argument.}}{=}$$

$$= D_3\big(D_2 D_1 f(x,y,z)\big) = D_3 D_2 D_1 f(x,y,z) = f^{(3)}_{123}(x,y,z)$$

Analogt motivertas att om f är av klassen C^m på en öppen delmängd av $\Re^n$ så är de blandade derivatorerna av ordning $\leq m$ lika där man deriverar lika många gånger med avseende på var och en av variablerna.

2.59

Bestäm alla lösningar f av klassen C^2 till differentialekvationen $xf''_{xx} - yf''_{xy} + f'_x \ \ , y > 0$

Enligt förslag gör vi det genom att införa nya variabler u och v.

Genom att sätta

$$(1) \begin{cases} u = y \\ v = xy \end{cases} , y > 0 \quad \left(\Leftrightarrow \begin{matrix} x = \dfrac{v}{u} \\ y = u \end{matrix} \quad , u > 0 \right)$$

$f \in C^2 \Rightarrow f \in C^2 \Rightarrow f$ är differentierbar $\Rightarrow$

Vi kan använda kedjeregeln på f

Vi har att

$f \in C^2 \Rightarrow$ Partiella 1 : a derivator till $f \in C^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Partiella 1 : a derivator är differentierbar $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Kedjeregeln kan användas

Vidare har vi att

$f \in C^2 \Rightarrow$ Blandade 2 : a derivatorna till f är lika.

Vi får följande :

$$(2) \ \ \underline{f'_x} \underset{\text{Enligt kedjeregeln}}{=} f'_u u' x + f'_v v' x \underset{\text{Enligt (1)}}{=} f'_u \cdot 0 + f'_v y = \underline{f'_v y}$$

$$(3) \ \ \underline{\underline{f'_y}} = f'_u u' y + f'_v v' y = f'_u \cdot 1 = \underline{\underline{f'_u + f'_v x}}$$

Fortsatt derivering ger att

$$(4)\quad f''_{xx} = D_x f'_x \underset{\text{Enligt (2)}}{=} \overbrace{D_x(f'_v y)}^{\textit{(Beror ej av y)}} = (\underline{D_x f'_v})y \underset{\substack{\text{Enligt (2) med} \\ f \text{ utbytt mot } f'_v}}{=} \left(\underline{(D_v f'_v)y}\right)y = f''_{vv}y^2$$

$$(5)\quad f''_{xy} = D_y f'_x \underset{\text{Enligt (2)}}{=} D_y(f'_v y) \underset{\substack{\text{Produktregeln} \\ \text{för derivering}}}{=} (\underline{D_y f'_v})y + f'_v \cdot 1 \underset{\substack{\text{Enligt (3) med } f \\ \text{utbytt mot } f'_v}}{=} \left(\underline{D_u f'_v + (D_v f'_v)x}\right)y + f'_v = \underbrace{f''_{vu}y}_{= f''_{uv}y} + f''_{vv}xy + f'_v =$$

$= f''_{uv}y + f''_{vv}xy + f'_v y$

Insättning av (2), (4) och (5) i givna differentialekvation ger att

$xf''_{vv}y^2 - y\left(f''_{uv}y + f''_{vv}xy + f'_v\right) + f'_v y = 0$

$\because \quad -y^2 f''_{uv} = 0$

$\quad y^2 f''_{uv} = 0$

$\quad u^2 f''_{uv} = 0 \ , u > 0$

$\because f''_{uv} = 0 \ , u > 0$

$\because D_v(f'_u) = 0$

$\because f'_u = \varphi(u)$ där $\varphi \in C^1(\Re_+)$ godtyckligt.

$\because f = \int \varphi(u)du \underset{\text{Där } g'=\varphi}{=} g(u) + h(v)$

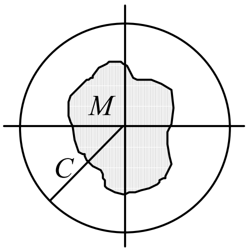
Där $g \in C^2(\Re)$ är godtyckligt i x och y får vi att

$f = g(y) + h(xy)$

<u>Största och minsta värde på icke - kompakta mängder $(\Re^2)$</u>

$M \subset \Re^n$ kallas begränsad om $\exists C > 0$ så att $|x| \le C \ \ \forall x \in M$

<u>Ex</u>



$|x| \le C \ \ \forall x \in M$ gäller med C som i figur

$\because M$ är begränsad.

$M \subset \Re^n$ kallas kompakt om M både är sluten och begränsad.

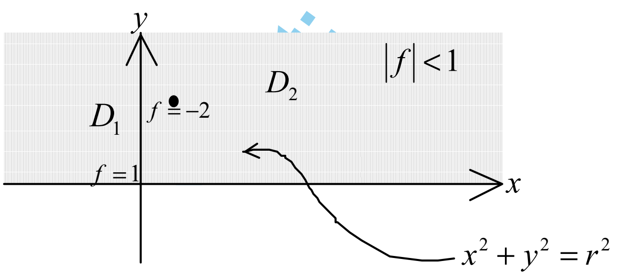
<u>Sats 1</u>

Om $D \subset \Re^n$ är kompakt och f är kontinuerlig på D så har f alltid största och minsta värde på D.

Några exempel då detta kan användas vid studier av största och minsta värde på icke - kompakta mängder är följande exempel:

(Funktionerna f nedan antas vara kontinuerliga.)

<u>Ex 1</u> $f(x, y)$ studeras på $D: y \ge 0$



Antag att följande gäller för $r > 0$

På D_1 som är kompakt har f enligt sats 1 ett största och minsta värde. Och det måste gälla att

$\max_{D_1} f \ge 1, \ \min_{D_1} f \le -2$

Eftersom $|f| < 1$ på D_2 följer att f har största (minsta) värde på D och att

$$\max_D f = \max_{D_1} f$$

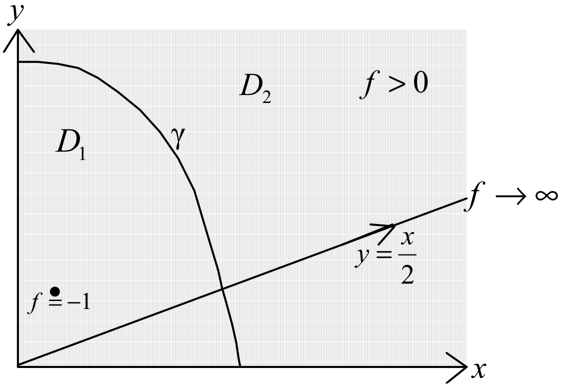
$$\left(\min_D f = \min_{D_1} f \right)$$

Detta motiverar att f har både största och minsta värde på D.

<u>Ex 2</u> $f(x, y)$ studeras på $D: x \geq 0,\ y \geq 0$

Följande antas gälla

För någon kurva γ



På D_1 som är kompakt har f enligt sats 1 ett minsta värde, och det gäller att

$$\min_{D_1} f \leq -1$$

Eftersom $f > 0$ på D_2 så följer att f har ett minsta väre på hela D

och $\min_{\mathrm{D}} f = \min_{D_1} f$.

Eftersom $f \to \infty$ längs $y = \dfrac{x}{2}$ i 1:a kvadranten saknar f största värde på D.

Hur bestämmer man största/minsta värdet <u>om</u> det existerar?

<u>Sats 2</u>

<u>Om</u> f har största/minsta värde på D antas det bland följande punkter :

1) Punkter i D^0 (= det inre av D) där $f_1' = f_2'$ $(= \ldots = f_n') = 0$

2) Punkter i D^0 där någon av $f_1', f_2' (\ldots, f_n') \nexists$.

3) Punkter på ∂D (= randen av D).