Kedjeregeln

Vi visar kedjeregeln i fallet

$f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)$

En funktion $f(x,y)$ är differentierbar i en punkt $(a,b) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1,\ f_1'(a,b),\ f_2'(a,b) \text{ båda existerar} \\ 2,\ \dfrac{f(x,y)-f(a,b)-f_1'(a,b)(x-a)-f_2'(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \to 0 \text{ då } (x,y)\to(0,0) \end{cases}$$

$$\text{Sätt } \varepsilon(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)-f(a,b)-f_1'(a,b)(x-a)-f_2'(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} & \text{då } (x,y)\neq(a,b) \\ 0 & \text{då } (x,y)=(a,b) \end{cases}$$

Då gäller alltså att

$$f(x,y)-f(a,b)=f_1'(a,b)(x-a)+f_2'(a,b)(y-b)+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\cdot\varepsilon(x,y)\ \forall(x,y)\ \big(\text{inklusive } (a,b)\big)$$

Där $\varepsilon(x,y)\to 0=\varepsilon(x,y)$ då $(x,y)\to(a,b)$

Vi kan nu visa att kedjeregeln i fallet $f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)$

Sats (Kedjeregeln, en variant)

Antga att

1, $\varphi(t)$ och $\psi(t)$ är deriverbara i $t=t_0$

2, $f(x,y)$ är differentierbar (inga skarpa hörn) i punkten $\big(\varphi(t_0),\psi(t_0)\big)$.

Då är $f\big(\varphi(t_0),\psi(t_0)\big)$ deriverbar i $t=t_0$ med derivata

$$(*)\ \frac{d\big(f\big(\varphi(t_0),\psi(t_0)\big)\big)}{dt}=f_1'\big((\varphi(t_0),\psi(t_0)\big)\varphi'(t_0)+f_2'\varphi\big((t_0),\psi(t_0)\big)\psi'(t_0)$$

Bevis Vi måste enligt definition av derivata visa att

$$\frac{f\big(\varphi(t_0+h),\psi(t_0+h)\big)-f\big(\varphi(t_0),\psi(t_0)\big)}{h}\to \text{HL }(*) \text{ då } h\to 0$$

Eftersom $f(x,y)$ är differentierbar i $\big(\varphi(t_0),\psi(t_0)\big)$ så gäller enligt inledningen att

$$(1)\ f(x,y)-f\big(\varphi(t_0),\psi(t_0)\big)=$$

$$=f_1'\big(\varphi(t_0),\psi(t_0)\big)\big(x-\varphi(t_0)\big)+f_2'\big(\varphi(t_0),\psi(t_0)\big)\big(y-\psi(t_0)\big)+\sqrt{(x-\varphi(t_0))^2+(y-\psi(t_0))^2}\cdot\varepsilon(x,y)$$

Där $\varepsilon(x,y)\to 0=\varepsilon\big(\varphi(t_0),\psi(t_0)\big)$ då $(x,y)\to\big(\varphi(t_0),\psi(t_0)\big)$

Sätt $x=\varphi(t_0+h),\ y=\psi(t_0+h)$ i (1) och derivera med h så fås att

$$(2)\ \frac{f\big(\varphi(t_0+h),\psi(t_0+h)\big)-f\big(\varphi(t_0),\psi(t_0)\big)}{h}=f_1'(\ldots)\underbrace{\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}}_{\substack{\to\varphi(t_0)\text{ då } h\to 0\\ \text{enligt difinition}\\ \text{av derivata}}}+f_2'(\ldots)\underbrace{\frac{\psi(t_0+h)-\psi(t_0)}{h}}_{\substack{\to\psi(t_0)\text{ då } h\to 0\\ \text{enligt difinition}\\ \text{av derivata}}}+$$

$$+\frac{1}{h}\sqrt{\big(\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)\big)^2+\big(\psi(t_0+h)-\psi(t_0)\big)^2}\cdot\varepsilon\big(\varphi(t_0+h),\psi(t_0+h)\big)$$

Vidare har vi att

(3) φ, ψ deriverbara i $t = t_0 \Rightarrow \varphi, \psi$ är kontinuerlig i $t = t_0 \Rightarrow$

$\varphi(t_0 + h) \to \varphi(t_0), \psi(t_0 + h) \to \psi(t_0)$ då $t \to t_0 \Rightarrow$

$\varepsilon\big(\varphi(t_0 + h), \psi(t_0 + h)\big) \to 0$ då $h \to 0$, ty $\varepsilon(x, y) \to 0 = \varepsilon\big(\varphi(t_0), \psi(t_0)\big)$ då $(x, y) \to \big(\varphi(t_0), \psi(t_0)\big)$

Samt att

$$(4)\ \left|\frac{1}{h}\sqrt{\big(\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)\big)^2+\big(\psi(t_0+h)-\psi(t_0)\big)^2}\right| = \underbrace{\sqrt{\underbrace{\left(\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}\right)}_{\to\varphi'(t_0)}^2+\underbrace{\left(\frac{\psi(t_0+h)-\psi(t_0)}{h}\right)}_{\to\psi'(t_0)}^2}}_{\text{då } h\to 0}$$

(2), (3) och (4) visar satsen.

$$\left(\begin{array}{l}\text{(2), (3) och (4) ger ju att}\\ \dfrac{f\big(\varphi(t_0+h),\psi(t_0+h)\big)-f\big(\varphi(t_0),\psi(t_0)\big)}{h} \to f_1'(\ldots)\varphi'(t_0)+f_2'(\ldots)\psi'(t_0)+\underbrace{\sqrt{\big(\varphi'(t_0)\big)^2+\big(\psi'(t_0)\big)^2}\cdot 0}_{=0 \text{ då } h\to 0}\end{array}\right)$$

Resultatet i satsen skrivs ofta så här

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$\big(f(x, y)$ är given. Vi sätter $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.$\big)$

Annan variant av kedjeregeln:

Betrakta fallet att vi har en funktion $f(x,y)$ och sätter $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ f antas vara differentierbar och φ och ψ ha partiella 1:a derivator.

Då är f deriverbar med avseende på u och v och

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

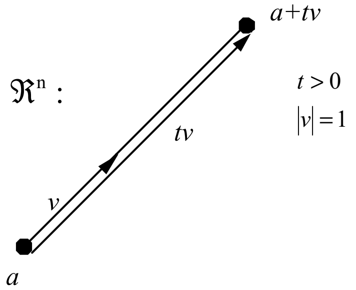
Detta följer direkt ur satsen.

(Derivatan med avseende på u fås genom att betrakta v som en konstant och derivera som vanligt med avseende på u, dvs precis fallet i satsen.)

Gradient och riktningsderivata

Gradienten till en funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ är vektorn $\left(f_1'(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_n'(x_1,\ldots,x_n)\right)$, skrivs $\nabla f(x_1,\ldots,x_n)$ (Utläses "nambla f" eller *grad* $f(x_1,\ldots,x_n)$).

Vi ska nu definiera riktningsderivata, låt a vara en punkt i $\Re^n$, och låt v vara en enhetsvektor i $\Re^n$ (dvs $|v|=1$), och låt f vara en funktion av n variabler.



Medelökningen av f per längdenhet vid förflyttning från punken a till punkten $a+tv$. Längs räta linjen mellan dem är $=\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{|tv|}\underset{\substack{\text{Ty } t>0\\ \text{och } |v|=1}}{=}\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t}$

Gränsvärdet $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t}$,

Om det existerar, ger ökningen av f per längdenhet i punkten a i riktning v. Om det existerar riktningsderivatan av f i punkten a i riktning v. Skrivs $f_v'(a)$, $D_v f(a)$.

Sats f differenierbar i $a \Rightarrow$

$f_v'(a)\ \exists\, \forall v$ (med $|v|=1$), och $f_v'(a)=\nabla f(a)\underset{\text{skallärt}}{\cdot} v$

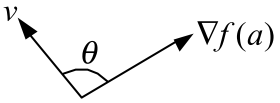
Bevis Se kursbok.

En naturlig fråga i samband med riktningsderivator är frågan: I vilken riktning är $f_v'(a)$ störst (minst) i en punkt?

Sats $f_v'(a)$ blir störst (minst) på v har samma (motsatt) riktning som $\nabla f(a)$. Största (minsta) värdet är $|\nabla f(a)|$ $(-|\nabla f(a)|)$.

Bevis I fallen $n = 2$ och $n = 3$

Låt θ vara vinkeln $\nabla f(a)$



$(0 \leq \theta \leq \pi)$

Enligt definition av skalärprodukt (i fallen $n = 2$ och $n = 3$)

Får vi att

$$f_v'(a) \underset{\substack{\text{Enligt} \\ \text{tidigare sats}}}{=} \nabla f(a) \cdot v = |\nabla f(a)|\underbrace{|v|}_{=1}\cos\theta = |\nabla f(a)|\cos\theta$$

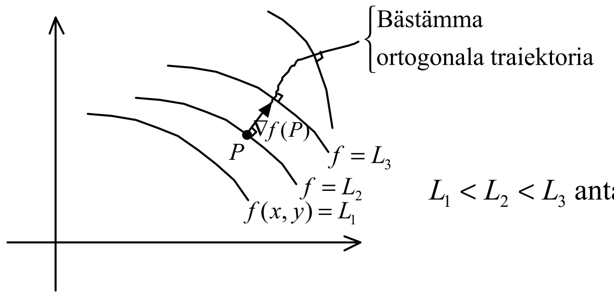
(f antas differentierbar)

$\because f_v'(a)$ störst (minst)

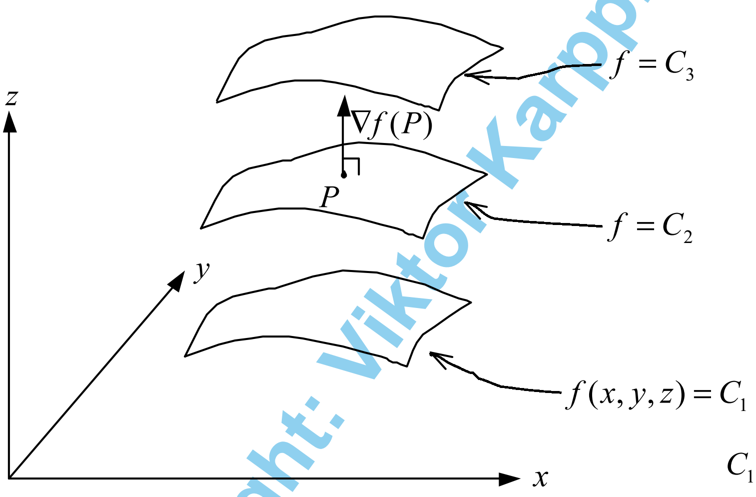
Då $Q = 0$ $(\theta = \pi)$ och största (minsta) värdet är

$|\nabla f(a)|$ $(-|\nabla f(a)|)$

Konsekvens :



$L_1 < L_2 < L_3$ antas



$C_1 < C_2 < C_3$ antas