Partiell derivator

Låt $f(X_1,...,X_n)$ vara en funktion av n variabler. Om gränsvärdet...

$$(*)\ \lim_{n\to 0}\frac{f(a_1,...,a_{k-1},a_k+h,a_{k+1},...,a_n)-f(a_1,...,a_{k-1},a_k,a_{k+1},...,a_n)}{h}$$

existerar och är endligt sägs f vara partiellt deriverbar med avseende på variabel nr k i punkten $(a_1,...,a_n)$, och gränsvärdet kallas partiella derivatan. f med avseende på variabel nr k i punkten $a=(a_1,...,a_n)$ och skrivs $f_k^{'}(a)$.

Om gränsvärdet (*) inte existerar är f ej partillt deriverbar med avseende på variabel nr k i punkten a.

Andra beteckningar för $f_k^{'}(a)$ är:

$$f_{x_k}^{'}(a),\quad D_k f(a),\quad D_{x_k} f(a),\quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

Konsekvens av definition av $f_k^{'}(a)$:

$f_k^{'}(a)$ fås genom att hålla variablerna nr $1,..,k-1,k+1,...,n$ fixa och derivera "som vanligt" med avseende på variabel nr k.

Ex

$f(x,y)=x^3\sin xy$

$f_1^{'}(x,y)=3x^2\sin xy+x^3(\cos xy)y$

$f_2^{'}(x,y)=x^3(\cos xy)x$

Derivata och linjär approximation i en variabel

Sats:

Låt f vara en funktion av en variabel och antag att f är deriverbar i punkten a.

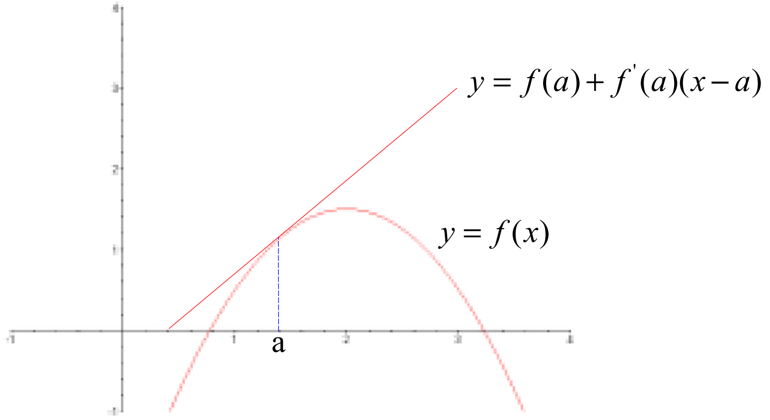
Då gäller att

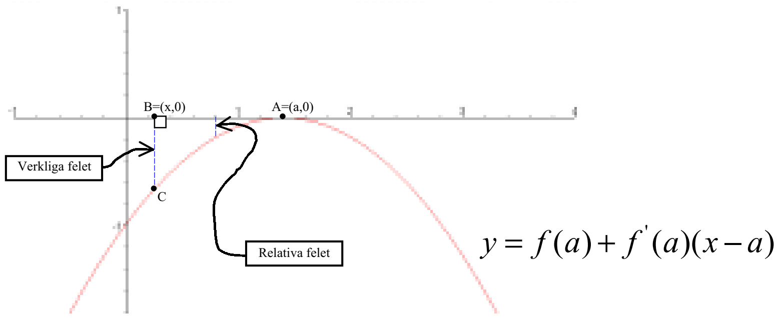
$$(*)\quad \frac{f(x)-f(a)-f^{'}(a)(x-a)}{x-a}\to 0 \text{ då } x\to a$$

Bevis

$$\frac{f(x)-f(a)-f^{'}(a)(x-a)}{x-a}=\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\substack{\to f^{'}(x)\text{ då } x\to a\\ \text{enl def av}\\ \text{derivata}}}-\frac{f^{'}(a)(x-a)}{(x-a)}\to f^{'}(a)-f^{'}(a)=0$$

Geometrisk tolkning av (*) :





$|BC| = |Y_c| = f(x) - f(a) - f^{'}(a)(x-a)$

$|AB| = |x-a|$

Enligt satsen ovan gäller att $\dfrac{|BC|}{|AB|} \to 0$ då $B \to A$

Det betyder att det relativa felet $\to 0$ då $x \to a$.

Vid approximationen

$f(x) \approx f(x) - f(a) - f^{'}(a)(x-a)$ nära a (f antas här vara deriverbar i a).

Nära punkten a kan alltså $f(x)$ approximeras av den linjära funktionen $f(x) - f(a) - f^{'}(a)(x-a)$

Derivata och linjär approximation i flera variabler

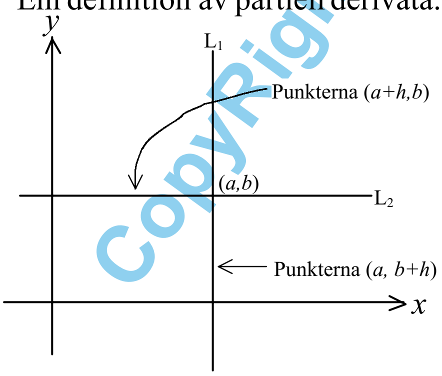
Betrakta en funktion *f(x,y)* av två variabler och antag båda partiella 1 : a derivatorna existera i (a,b),

dvs $f_1^{'}(a,b)$ och $f_2^{'}(a,b)$ antas existera.

$$f_1^{'}(a,b) = \lim \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$$f_2^{'}(a,b) = \lim \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

Enl definition av partiell derivata.



Definitionerna av $f_1^{'}(a,b)$ och $f_2^{'}(a,b)$ använder bara f : s värde på linjerna L_1 och L_2, utanför dessa båda linjer är värdet av f egalt (likvärdigt) existensen av $f_1^{'}(a,b)$ och $f_2^{'}(a,b)$. Detta säger alltså inte mycket om hur f beter sig nära (a,b).

Något bättre behövs alltså om vi vill katraktirisera de funktioner som är "släta" nära en punkt. Med "slät" motsvarande funktionsgraf är "slät" nära punkten.

Inspirerade av vad som gäller i en variabel säger vi att en funktion $f(x_1,...,x_n)$ av n variabler är definierbar i en punkt $(a_1,...,a_n) \Leftrightarrow$ det finns en linjär funktion $B + A_1X_1 + ... + A_nX_n$ i vaiablerna $x_1...x_n$ sådan att

$$(**)\ \frac{f(x_1,...,x_n) - B + A_1X_1 + ... + A_nX_n}{\sqrt{(x_1-a_1)^2 + ... + (x_n-a_n)^2}} \to 0 \text{ då } (x_1,...,x_n) \to (a_1,...,a_n)$$

(Nämnaren = avståndet mellan $(x_1,...,x_n)$ och $(a_1,...,a_n)$)

(**) Betyder att $f(x_1,...,x_n)$ approximeras med den linjära funktionen $B + A_1X_1 + ... + A_nX_n$ nära punkten $(a_1,...,a_n)$, och att rellativa i approximationen $\to 0$ då $(x_1,...,x_n) \to (a_1,...,a_n)$

För att approximationen ovan ska vara bra kräver vi också att $f(x_1,...,x_n)$ överstämmer med $B + A_1X_1 + ... + A_nX_n$, då $(x_1,...,x_n) = (a_1,...,a_n)$. Dvs vi kräver att $f(x_1,...,x_n) = B + A_1X_1 + ... + A_nX_n$ gäller.

Detta ger $B = f(a_1,...,a_n) - A_1a_1 -,...,- A_na_n$ och att

$$B + A_1X_1 + ... + A_nX_n = f(a_1,...,a_n) - A_1a_1 -,...,- A_na_n + B + A_1X_1 + ... + A_nX_n =$$
$$= f(a_1,...,a_n) + A_1(X_1 - a_1) + ... + A_n(X_n - a_n)$$

Kombinerat med våran definition ovan ger detta att en funktion $f(x_1,...,x_n)$ är differentierbar i en punkt $(a_1,...,a_n) \Leftrightarrow \exists A_1,..., A_n$ så att

$$(***)\ \frac{f(x_1,...,x_n) - f(a_1,...,a_n) - A_1(X_1 - a_1) - ... - A_n(X_n - a_n)}{\sqrt{(x_1-a_1)^2 + ... + (x_n-a_n)^2}} \to 0 \text{ då } (x_1,...,x_n) \to (a_1,...,a_n)$$

Att en funktion är differentierbar i en punkt betyder geometriskt att motsvarande funktionsgraf är slät nära punkten.

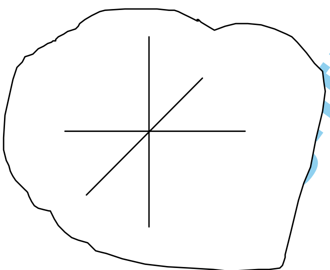
Om vi sätter $x_k = a_k + h_k \quad k = 1,...,n$ i $(***)$ ser vi att differentierbarhet också kan uttryckas som att f differentierbar i $(a_1,...,a_n) \Leftrightarrow \exists A_1,..., A_n$ så att

$$\frac{f(a_1+h_1,...,a_n+h_n) - f(a_1,...,a_n) - A_1h_1 - ... - A_nh_n}{\sqrt{h_1^2 + ... + h_n^2}} \to 0 \text{ då } (h_1,...,h_n) \to (0,...,0)$$

Om f är differentierbar i $(a_1,...,a_n)$ så gäller att

$f_1'(a_1,...,a_n),..., f_n'(a_1,...,a_n)$ alla existerar, samt att $A_k = f_k'(a_1,...,a_n) \quad k = 1,...,n.$

För differentierbarhet i övrigt se D och PB2.



$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$