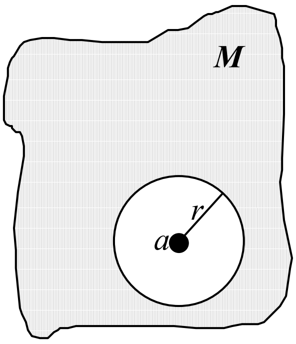
$\Re^n$ och mängder i $\Re^n$

$\Re^n$ är mängden av alla n - tipplar $(X_1,...,X_n)$ där $X_n \in \Re$
Med räknelagarna
$(X_1,..., X_n) + (Y_1,.., Y_n) = (X_1 + Y_1,..., X_n + Y_n)$
$\alpha(X_1,..., X_n) = (\alpha X_1,...,\alpha X_n)$
Det vanliga planet är $\Re^2$
Det vanliga rummet är $\Re^3$
Om $X = (X_1,..., X_n)$ och $Y = (Y_1,..., Y_n)$ är två punkter i $\Re^n$ sätter vi
$|X\text{-}Y| = \sqrt{(X_1 - Y_1)^2 + ... + (X_n - Y_n)^2}$ för $n = 2$ och $n = 3$ är "det vanliga avståndet" som fås med Pytagoras sats.

Låt nu M vara en delmängd av $\Re^n$. Och låt a vara en punkt i $\Re^n$. Punkten a kallas en inre punkt till $M \Leftrightarrow$ något klot kring a $\left(\text{dvs en mängd av typen } \{X \in \Re^n \,\|X - a| \le r\} \text{där } r > 0\right)$ som helt ingår i M.

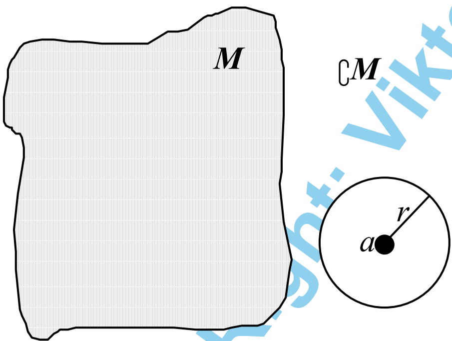
Ex



$\{X \in \Re^2 \,\|X - a| \le r\} \subseteq M$
a inre punkt till M.

a kallas en yttre punkt till $M \Leftrightarrow a$ är en inre punkt till $\complement M$.

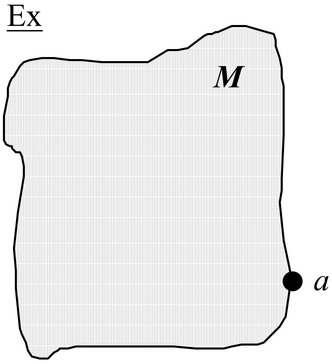
Ex



a är yttre punkt till M.

a kallas randpunkt till $M \Leftrightarrow a$ varken är inte eller yttre punkt till M.

Ex

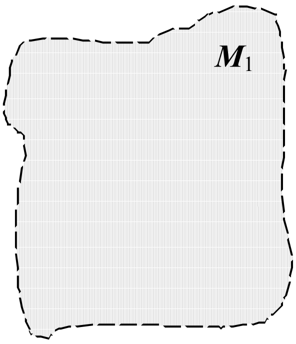


$\complement M$

a är randpunkt till M.

Delmängden M av $\Re^n$ kallas öppen $\Leftrightarrow$ alla randpunkter ligger i $\complement M$. Mängden av alla randpunkter till en mängd M betecknas med $\partial M \subseteq M$

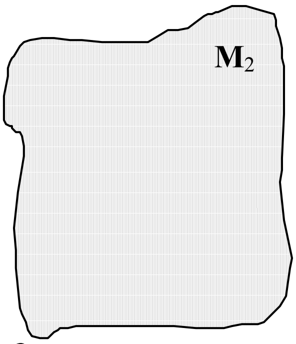
Ex



$\partial M_1 \not\subseteq M_1$ $(\partial M_1 \subseteq \complement M_1.)$

∂M_1 (= Punkter på den sträckade linjen)

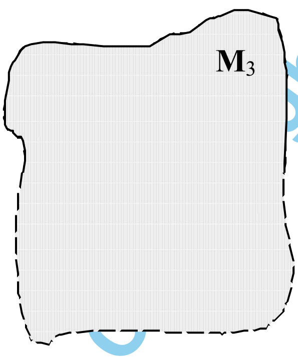
M_1 är öppen.



$\partial M_2 \subseteq M_2$

∂M_2

M_2 är sluten.



$\partial M_3 \subseteq M_3$

$\because$ Men ej öppen

$\partial M_3 \not\subseteq M_3$

$\because M_3$ Ej sluten

$\because M_3$ är varken sluten eller öppen.

Gränsvärden

Låt *f(x)* vara en funktion av n variabler *f(x)* sägs ha gränsvärdet A då X går mot $a \Leftrightarrow$

(*) $f(x) \to A$ då $X \to a$

$X \to a$ är detsamma som att

$$|X-a| = \sqrt{(X_1-a_1)^2+\ldots+(X_n-a_n)^2} \to 0$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Här är } X=(X_1,\ldots,X_n) \\ \qquad\quad a=(a_1,\ldots,a_n)\end{array}\right)$$

Ett tillräckligt villkor får att (*) ska gälla är alltså existensen av en funktion $g(r)$ sådan att

i) $|f(x)\text{-}A| \le g(r)$ $\forall X$ nära a

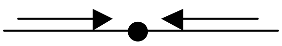
ii) $g(r) \to 0$ då $r \to 0^+$

Där $r = |X-a| = \sqrt{(X_1-a_1)^2+\ldots+(X_n-a_n)^2}$

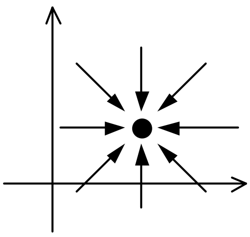
Ofta visas att (*) gäller genom att i två variabler används ofta polära koordinater för att göra detta.

Att visa att $f(x)$ saknar gränsvärde då $X \to a$ görs vanligen med ett av följande två metoder.

Två sätt



∞ många sätt



1) Man hittar en väg in mot a längs vilken f saknar gränsvärde.
2) Man hittar två olika vägar in mot a sådana att f har gränsvärde längs båda vägarna, men dessa båda gränsvärderna är olika.

Om $a \neq 0$ brukar man också vanligen genom substitutionen $u = x-a$ $\quad (\Leftrightarrow x = u+a)$ överföra det givna gränsvärdet där variabeln $u \to 0$.

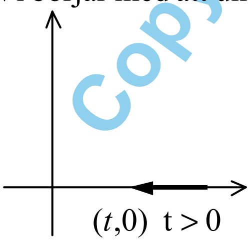
Det gör ofta räkningarna enklare.

Ex $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

1)

Vi börjar med att undersöka några vägar in mot (0,0)

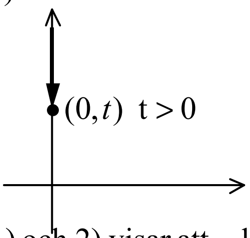


$x = t, y = 0$ ger

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{t^2-0}{t^2+0} = 1 \;\; \forall t>0 \to 1 \text{ då } t \to 0^+$$

$\because$ $f(x,y)$ närmar sig (0,0) längs den possitiva x-axeln.

2)



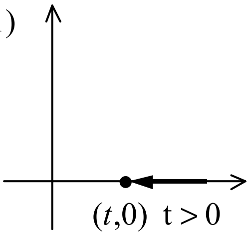
$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{0-t^2}{0+t^2}=-1 \;\; \forall t>0 \text{ då } t\to 0^+$$

$\because$ $f(x,y)$ går mot -1 då (x,y) närmar sig $(0,0)$ längs possitiva y-axeln.

1) och 2) visar att $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists$

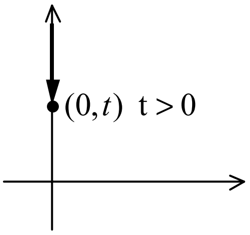
<u>Ex</u> $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$?

1)



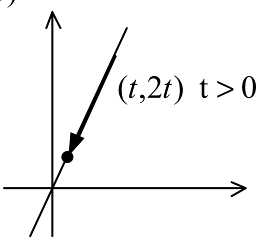
$$x=t, y=0 \text{ ger } \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}=\frac{t^3-0}{t^2-0}=t \;\; \forall t>0 \;\to 0 \text{ då } t\to 0^+$$

2)



Possitiva y-axeln in mot origo ger samma resultat, liksomlinjen $y=x$ in mot origo.

3)



$x=t, y=2t$ ger

$$\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}=\frac{t^3-0}{t^2-0}=t \;\; \forall t>0 \;\to 0 \text{ då } t\to 0^+$$

1), 2) och 3) visar att <u>om</u> givna gränsvärdet existerar måste det vara 0. Vi fortsätter nu att visa att givna gränsvärdet existerar och är 0.

Vi har att

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^3}-0\right|=\frac{|x^3-y^3|}{x^2+y^3}\underset{\Delta\text{-olikheten}}{\leq}\frac{|x|^3-|y|^3}{x^2+y^3}=\begin{pmatrix}\text{Polära koordinater}\\ x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$r=|(x,y)-(0,0)|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{r^3|\cos\theta|^3+r^3|\sin\theta|^3}{r^2}\underset{\substack{|\cos\theta|\leq 1\ \forall\theta\\ |\sin\theta|\leq 1\ \forall\theta}}{\leq}\frac{r^3+r^3}{r^2}=2r$$

$\because |f(x,y)-0|\leq 2r$

Men $2r\to 0$ då $r=|(x,y)-(0,0)|\to 0^+$

$\because \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\,\exists$ och är 0

Gränsvärden av typen

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \;\; (x \in \Re^n)$

Behandlas på liknande sätt.

$f(x) \to A$ då $x \to \infty$ sägs gälla $\Leftrightarrow$

$f(x) \to A$ då $r = |x - 0| = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + \ldots + (x_n - 0)^2} \to \infty$

Ett tillräckligt vilkor för detta är att det finns en funktion $g(r)$ sådan att

1) $|f(x) - A| \leq g(r)$

2) $g(r) \to 0$ då $r \to \infty$

där $r = |x - 0| = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + \ldots + (x_n - 0)^2}$

Kontinuitet

Låt $f(x)$ vara en funktion av n variabler och låt a vara en punkt i $\Re^n$.

$f(x)$ sägs vara kontinuerlig i $a \Leftrightarrow f(x) \to f(a)$ då $x \to a$.